KLASSIEKE POTENTIAALTHEORIE

PROF.DR. A.F. MONNA

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht
1974

Klassieke potentiaaltheorie

Globaal gezegd komt de potentiaaltheorie neer op de theorie van de harmonische functies, dat zijn de oplossingen van de vergelijking van Laplace $\Delta u = 0$. Daaraan worden gekoppeld de super- en subharmonische functies, potentialen van massaverdelingen (maten), het probleem van Dirichlet. De toevoeging "klassiek" dient ter onderscheiding van de betrekkelijk recente zogenaamde axiomatische potentiaaltheorie, waarin van differentiaalvergelijkingen in het geheel geen sprake meer is. Kennis van de klassieke theorie is nuttig voor het goede begrip van de axiomatische theorie. Overigens wil klassiek niet zeggen, dat een theorie in dit college wordt behandeld die enige eeuwen oud is. Ook over de klassieke theorie wordt thans nog gepubliceerd (zie b.v. de desbetreffende sectie van de Math. Reviews).

HOOFDSTUK I

Harmonische functies

We behandelen de theorie van de zgn. harmonische functies, dat zijn functies gedefinieerd op een open verzameling in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ die aan zekere voorwaarden voldoen. Er zijn enkele verschillen tussen de theorie voor $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, maar die zijn, althans in het begin, niet essentieel. Sommige eigenschappen worden, gemakshalve, geformuleerd voor $\mathbb{R}^2$, andere algemener. Er is geen verwarring te vrezen. De theorie heeft een wat meetkundig karakter.
Soms duidt men in de literatuur punten in een gebied aan door P, Q, enz., soms ook door x,y,... Beide worden hier gebruikt.
Door Ω wordt een open verzameling aangeduid; Ω wordt gemakshalve (althans in het begin) begrensd ondersteld. (Er zijn enige moei-

lijkheden bij de overgang naar niet-begrensde gebieden.) Ik onderstel Ω samenhangend. De rand van Ω zij $\partial\Omega$.

Zij nu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

I.1. Gemiddelden. Zij u een reële continue functie op Ω. Zij $x_0 \in \Omega$. Zij $C^r_{x_0}$ een cirkel om x_0 met straal r (afgekort C). Stel dat $\overline{C} \subset \Omega$. Dan zij

$$\mathcal{M}^r_u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\theta \quad \text{(omtrekgemiddelde)}$$

$$\mathcal{A}^r_u(x_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u\rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{2}{r^2} \int_0^r \mathcal{M}^\rho_u(x_0)\rho d\rho \quad \text{(oppervlaktegemiddelde).}$$

Beschouw de condities:

(i) $\mathcal{M}^r_u(x_0) = u(x_0)$ voor alle $r < R$

(ii) $\mathcal{A}^r_u(x_0) = u(x_0)$ voor alle $r < R$.

Deze condities zijn equivalent.

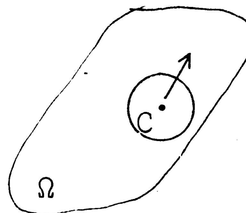
Definitie. u heet harmonisch in Ω indien voor elke $x_0 \in \Omega$ hetzij (i), hetzij (ii) geldt voor passende R.

Gevolg. Stel u heeft continue eerste afgeleiden. Met $\frac{d}{dn}$ wordt de uitwendige normale afgeleide op de rand van een gebied (voldoende regulier) aangegeven, d.w.z.

$$\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(n,x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n,y)$$

waarin n de normaal is. Men moet in de theorie steeds letten op de richting van de normaal; men ga dit zelf na. Dan is noodzakelijk en voldoende voor harmoniciteit:

$$\int_{\partial C} \frac{du}{dn}\, ds = 0 \text{ voor elke } C.$$



Evident uit de definitie.

Met differentiaalvormen geformuleerd luidt deze eigenschap

$$\int {}^{*}du = 0.$$

I.2. Het maximumprincipe

Zij u harmonisch (geen differentieerbaarheidsconditie).

Stel u heeft een maximum, resp. een minimum, in Ω. Dan is u constant in Ω.

Direct gevolg van de definitie. Globaal gezegd: "maxima liggen op de rand van het gebied". Scherper: stel in elk randpunt $a \in \partial\Omega$ geldt $\lim_{x \to a} u \geq 0$ $(x \in \Omega)$. Dan is $u \geq 0$ in Ω. Stel voor alle $a \in \partial\Omega$ geldt

$$\overline{\lim_{x \to a}}\, u(x) \leq \lambda.$$

Dan is $u(x) \leq \lambda$ voor alle $x \in \Omega$. Ga dit na!

Gevolg van het maximumprincipe

Zij u harmonisch in Ω. Stel $u \to 0$ als x nadert tot ∂Ω. Dan is $u = 0$. Breidt nl. u uit tot $\overline{\Omega}$ met waarden 0 op ∂Ω; $\overline{\Omega}$ is compact. Daarop neemt u zijn maximum aan, maar niet in Ω. Dus is $u = 0$.

Een zeer belangrijk probleem is het probleem van Dirichlet.

Probleem van Dirichlet

Gegeven zij een continue functie f op ∂Ω. Gevraagd wordt een harmonische functie u in Ω zó dat $u(x) \to f(a)$, als $x \to a$, $a \in \partial\Omega$ voor alle a.

Het gaat om de existentie van zo'n functie. Als die bestaat (maar dit is niet steeds zo) dan is zij wegens het maximumprincipe eenduidig bepaald.

I.3. Afgeleiden

De harmonische functies zijn C^∞-functies, d.w.z. zij zijn oneindig vaak differentieerbaar.

Beschouw de volgende functie $\phi \in C^\infty$, gedefinieerd voor $r \geqslant 0$:

$$\phi(r) = e^{\frac{1}{r^2-r_0^2}} \quad \text{voor } 0 \leqslant r < r_0$$

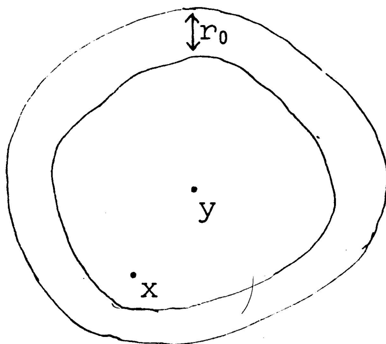
$$\phi(r) = 0 \quad \text{voor } r \geqslant r_0,$$

r_0 passend te kiezen.

Door toevoeging van constante factor λ zorgen we dat

$$2\pi \int_0^{r_0} \phi(r) r dr = 1.$$

Zij f een continue functie op Ω. Zij $x \in \Omega$.
Stel de afstand van x tot $\partial\Omega$ is $> r_0$; kies deze r_0 in de definitie van ϕ. Zij Ω_{r_0} de open verzameling van alle $x \in \Omega$ met afstand tot $\partial\Omega$ groter dan r_0. [Deze voorzorg is nodig ter vermijding van randmoeilijkheden; het gedrag van f bij de rand is onbekend.] Beschouw de functie F gedefinieerd door



$$F(y) = \iint_\Omega \phi(\|x-y\|) f(x) d\omega.$$

F is een C^∞-functie in Ω_{r_0} (differentiëren onder het integraalteken). Na herleiding volgt

$$F(y) = 2\pi \int_0^{r_0} \mathcal{M}_f^r \, \phi(r) r dr.$$

Neem nu voor f de harmonische functie u. Dan is $\mathcal{M}_f^r$ constant krachtens definitie. Dan volgt

$$F(y) = u(y)$$

waaruit volgt dat u C^∞ is in Ω_{r_0} en dus in Ω.

Opmerkingen. 1. Een dergelijk procédé is bekend uit de theorie van de distributies (regularisatie van een distributie).

2. De harmonische functie is nu C^∞, maar daaruit volgt nog niet dat u analytisch is. Dat volgt later.

I.4. Formules van Green

We beschouwen hiervoor gebieden met voldoende reguliere rand (normalen enz.). Dan gelden voor functies f en g met continue 2e afgeleiden de formules:

$$\iint_{\Omega} \Delta g d\omega = \int_{\partial\Omega} \frac{dg}{dn} ds \qquad \text{(1e formule)}$$

$$\iint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) d\omega = \iint_{\partial\Omega} (f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn}) ds \qquad \text{(2e formule).}$$

De condities waaronder deze formules gelden worden in dit college niet behandeld (men zie Van der Blij en Van Tiel).

Gevolgen

(i) Zij u harmonisch in Ω, dus C^{∞}. Uit de 1e formule en I.1. volgt dat voor elke cirkel $\overline{C} \subset \Omega$ geldt

$$\iint \Delta u d\omega = 0.$$

Wegens de continuïteit volgt daaruit $\Delta u = 0$.

(ii) Omgekeerd, als $\Delta u = 0$ volgt $\int \frac{du}{dn} ds = 0$, d.w.z. het gemiddelde = waarde in middelpunt, d.w.z. u is harmonisch in de zin van de definitie I.1.

Opmerkingen. Hieruit volgen enige eenvoudige gevolgtrekkingen:

a) Het harmonisch zijn van een functie is een locale eigenschap, d.w.z. ze wordt bepaald door eigenschappen in de omgeving van een punt.

b) De harmonische functies in Ω vormen een lineaire ruimte van continue functies.

c) Is u harmonisch in Ω, dan is de restrictie van u tot $\Omega_1 \subset \Omega$ harmonisch in Ω_1.

Is u harmonisch in de omgeving van elk punt van Ω, dan is u harmonisch in Ω.

In de axiomatische potentiaaltheorie vormen de eigenschappen b) en c) de definitie van het begrip "harmonische schoof op een locaal compacte topologische ruimte".

I.5. Voorbeelden

(i) Beschouw $\mathbb{R}^2$. Herleid Δu in poolcoördinaten (r,θ):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} .$$

Zoek oplossingen die alleen afhangen van r. Dat leidt tot

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

Dan vindt men de harmonische functie

$$A \log r + B.$$

Het is gebruikelijk te beschouwen de fundamentaaloplossing $\log \frac{1}{r}$, $[r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$.

In $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ vindt men analoog de oplossing

$$x \to \|x\|^{2-n}$$

$$x = (x_1,\ldots,x_n)$$

$$\|x\| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notatie

$$h(\|x\|) = \|x\|^{2-n} \quad (n \geqslant 3).$$

(ii) Neem voor Ω een gebied in het complexe vlak. Zij $f = u+iv$ een analytische reguliere functie in Ω. Dan gelden de vergelijkingen van Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Daaruit leidt men af:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Vergelijk nu $\log \frac{1}{r}$ met de functie $\log \frac{1}{z}$. Wat weet u van het imaginaire deel?

Waarschuwing: in $\mathbb{R}^2$ is de functie $\frac{1}{r}$ niet harmonisch (buiten 0); $\frac{1}{r}$ is niet het reële deel van $\frac{1}{z}$!

(iii) Potentialen

In $\mathbb{R}^3$ is de vorengenoemde functie $\frac{1}{r}$ het eenvoudigste voorbeeld van een functie die men een potentiaal noemt. Om potentialen algemeen te definiëren, gaat men uit van een maat μ op $\mathbb{R}^n$. In de potentiaaltheorie spreekt men soms wel van een massaverdeling μ, dat is dan een maat met de bekende additiviteitseigenschappen. Belangrijk zijn positieve maten $\mu \geq 0$. Heeft men een maat dan definieert men ten opzichte daarvan integralen

$$\int f d\mu .$$

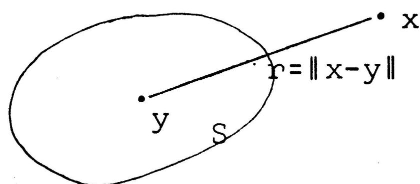
Men kan daartoe ook een toegang vinden door een integraal te definiëren als een lineaire vorm (lineaire functionaal; Radon-maat resp. Radon-integraal).

Zij μ een positieve maat met compacte drager, d.w.z. er is een compacte verzameling S zó dat

$$\int f d\mu = 0$$

voor alle f waarvan de drager ligt in het complement van S. Beschouw $\mathbb{R}^3$. Neem $x \in \complement S$. Dan heeft zin

$$U^\mu = \int_S \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|} .$$



Deze integraal heet de potentiaal van μ en $U^\mu(x)$ is de waarde van de potentiaal in x.

U^μ is een harmonische functie buiten de drager S (differentiëren onder het integraalteken).

Laten we $+\infty$ als waarde toe, dan heeft U^μ ook zin op S. Definieer nl. als $p > 0$

$$\phi_p(x,y) = \inf(\|x-y\|^{-1}, p),$$

$$\psi_p = \int \phi_p(x,y) d\mu(y),$$

$$U^\mu = \sup_p \psi_p .$$

Dit blijkt later nuttig bij superharmonische functies.
De hier ingevoerde potentialen zijn gedefinieerd op de hele ruimte. We zullen later potentialen ontmoeten, behorend bij een open deel van $\mathbb{R}^n$.

Enkele voorbeelden

(a) Beschouw in $\mathbb{R}^3$ een bol B om 0 met straal r. Beschouw op het boloppervlak de gewone oppervlaktemaat (uniforme verdeling met dichtheidsfunctie 1). Dan vindt men de potentiaal

$$U = \int_{\partial B} \frac{d\omega}{\rho} .$$

Wegens de rotatie-invariantie is U constant op ∂B, dus constant op B en dus gelijk aan de waarde in het middelpunt $= 4\pi r$. Buiten B hangt U wegens de rotatie-invariantie alleen af van de afstand tot 0, zodat zij dus van de vorm $\frac{A}{r}$ moet zijn. Continuïteitsoverwegingen leiden ertoe dat buiten B geldt

$$U = \frac{4\pi r^2}{\|x\|} .$$

Merk op dat de potentiaal van de maat op het boloppervlak in punten buiten de bol gelijk is aan de potentiaal van de discrete maat $4\pi r^2$ geplaatst in 0. Dit is een zeer eenvoudig geval van de zogenaamde balayage, een belangrijk begrip in de potentiaaltheorie.

(b) Zij E een begrensde aftelbare verzameling. Zij μ een eindige discrete positieve maat op E. Bestaat E uit de punten $(x_i)_{i=1,n,..}$, dan zij $\mu(\{x_i\}) = \mu_i$. Dan is een potentiaal gedefinieerd door

$$U^\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{r_i} \quad \text{als} \quad r_i = \|x-x_i\| .$$

U heeft de waarde $+\infty$ in elk punt x_i. Men ziet in dat <u>elke</u> discrete maat ≥ 0 op E een potentiaal definieert die (a) $+\infty$ is in elk punt $x_i \in E$. Maar men kan het wel zó inrichten dat (b) de potentiaal eindig is in een gefixeerd maar willekeurig punt $x \notin E$.

Kies nl. factoren λ_i zó dat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{\mu_i}{r_i} < \infty.$$

Dan voldoet de maat $\{\lambda_i \mu_i\}$.

Een verzameling die potentialen met de eigenschappen a) en b) toelaat heet polair; zij worden algemener gedefinieerd en vervullen dan een belangrijke rol (o.a. in verband met het begrip capaciteit).

(c) Veel voorkomende potentialen in de potentiaaltheorie zijn van de vorm

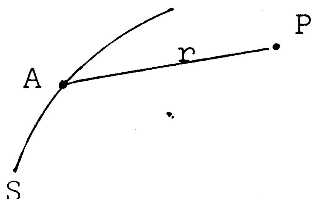
$$U = \int \frac{f d\omega}{r},$$

waarin f dan een dichtheidsfunctie is. In de natuurkunde spreekt men dan van de potentiaal van een enkele laag. Ik zal hem van de eerste soort noemen. Als ρ voldoende regulier is, bewijst men dat ($\mathbb{R}^3$)

$$\Delta U = -4\pi f$$

(vergelijking van Poisson). Is $f \geqslant 0$ dan is dus $\Delta u \leqslant 0$. Dit is belangrijk voor het vervolg, waar superharmonische functies worden behandeld. U is superharmonisch (echter buiten de drager van de maat harmonisch).

(d) Laat S de drager zijn van de maat μ; S wordt voldoende regulier ondersteld, bijv. een oppervlak met normalen. Zij $P(x,y,z) \notin S$.



Zij $A(a,b,c) \in S$. Beschouw $\frac{1}{r}$ (r afstand van A tot P). Differentieer $\frac{1}{r}$ naar x bij vaste A.

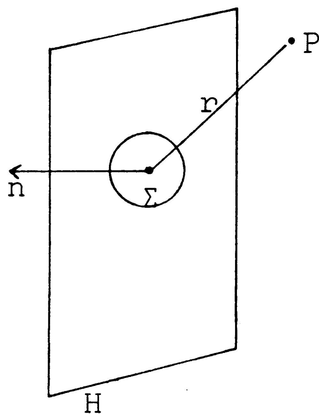
Het resultaat $-\frac{x-a}{r^3}$ is een harmonische functie van (x,y,z) buiten S. Analoog t.o.v. y en z. Integratie over S geeft, na vermenigvuldiging met passende cos α, cos β, cos γ en optelling:

$$\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\mu_A .$$

Dit is nu een harmonische functie buiten S. We noemen hem een potentiaal van de 2e soort. Fysici zeggen dat dit een potentiaal is van een dubbellaag omdat hij gevormd wordt door dipolen.

Merk op: een potentiaal van de 2e soort is de som van de afgeleiden naar x,y,z van een potentiaal van de eerste soort.

Het volgende voorbeeld is instructief.



Beschouw de rechter halfruimte t.o.v. het vlak H.

Zij Σ een deelverzameling van H die voldoende fatsoenlijk is opdat erover kan worden geïntegreerd.

Beschouw een functie f, gedefinieerd op H door

$$f = 1 \text{ op } \Sigma$$
$$f = 0 \text{ elders.}$$

Door f wordt een maat op H bepaald waarvan we de potentiaal van de 2e soort in een punt P in de halfruimte kunnen bepalen:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_H \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \frac{\cos(r,n)}{r^2}\, d\omega .$$

Ga na dat U(P) gelijk is aan de ruimtehoek waaronder men vanuit P de verzameling Σ ziet [als volgt gedefinieerd: beschouw de kegel voortgebracht door P en Σ; neem een eenheidsbol om P. De ruimtehoek is het oppervlak van de doorsnede van bol en kegel]. Daaruit volgt

$$U(P) = 0, \text{ als } P \in H-\Sigma$$
$$U(P) = 1, \text{ als } P \in \Sigma .$$

Verder is U harmonisch in de open halfruimte. Voert men dit

procédé uit voor een verzameling Σ_1 dan vindt men een harmonische functie U_1, voor een verzameling Σ_2 vindt men U_2. Is $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ en is U de functie toegevoegd aan Σ, dan ziet men dat

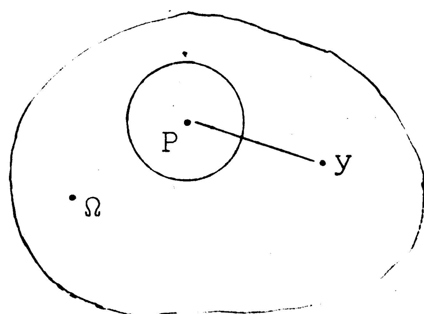
$$U = U_1 + U_2.$$

Men kan daarom de volgens dit procédé bepaalde harmonische functie beschouwen als een maat voor de verzameling Σ. Die maat hangt af van de keuze van het punt P. Slordig geformuleerd kan men zeggen: de maat is de harmonische functie in de halfruimte, behorend bij randwaarden op H gelijk aan 0 op $H-\Sigma$ en 1 op Σ. Het is een zogenaamde <u>harmonische maat</u>. Deze wordt later algemeen gedefinieerd en speelt een belangrijke rol bij het probleem van Dirichlet.

I.6. <u>Representatie van harmonische functies</u>

<u>Stelling</u>. <u>Elke harmonische functie is locaal te schrijven als de som van een potentiaal van de eerste soort en een potentiaal van de tweede soort</u>.

Is een harmonische functie U gegeven in een gebied Ω_0, dan kan men niet verwachten dat er een eenvoudige voorstelling van is te geven omdat het gedrag aan de rand $\partial\Omega_0$ onbekend is. Daarom wordt een representatie gezocht in een gebied Ω zó dat $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$. Bovendien onderstellen we dat Ω zodanig fatsoenlijk is dat de formules van Green kunnen worden toegepast. Dit verstaat men onder een locale representatie. Neem het geval in $\mathbb{R}^3$. Neem een punt P in Ω. Sla om P een bol B met $\overline{B} \subset \Omega$ en straal R. Pas de formule van Green toe op $\Omega-B$ met de functies u en $\frac{1}{r}$ [is x het punt P en $y \in \Omega-B$, dan is $r = \|x-y\|$].



Daar beide harmonisch zijn in $\Omega-B$ [$\frac{1}{r}$ harmonisch bij vaste x t.o.v.

y] , geldt

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma = \int_{\partial B} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma .$$

Noem de eerste integraal I_1, de tweede I_2. Dan is

$$I_2 = \int_{\partial B} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{1}{R} \int_{\partial B} \frac{du}{dn} d\sigma = -\frac{1}{R^2} \int u d\sigma - 0 = -4\pi u(P).$$

Dus

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\partial\Omega} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r}\frac{du}{dn} d\sigma \right] .$$

De eerste integraal is een potentiaal van de 2e soort, de tweede integraal is van de 1e soort.

Uit deze representatie leiden we de volgende belangrijke eigenschap af:

<u>De harmonische functies zijn analytische functies</u>.

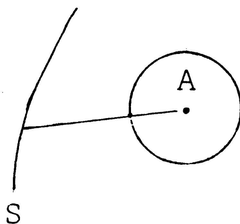
D.w.z. in de omgeving van een regulier punt (x_0, y_0, z_0) geldt een eenduidig bepaalde reeksontwikkeling

$$u(x,y,z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk}(x-x_0)^i (y-y_0)^j (z-z_0)^k .$$

Daar een potentiaal van de 2e soort gevormd wordt door afgeleiden van één van de eerste soort, behoeven we slechts te bewijzen dat een potentiaal

$$\int_S \frac{f d\omega}{r}$$

analytisch is. Er moet een reeks worden gevonden in de omgeving van een punt A niet op S.



Neem A(0,0,0). Punten op S zijn (ξ,η,ζ). Zij ℓ^* de kortste afstand van A tot S. Zij B een bol om A met straal $R < \frac{1}{8}\ell^*$. Stel $\ell = (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$. Punten in B zijn (x,y,z).

We schrijven

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\ell^2-(2x\xi+2y\eta+2z\zeta-R^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\ell}\frac{1}{(1-q)^{\frac{1}{2}}}$$

waarin

$$q = \frac{2x\xi}{\ell^2} + \frac{2y\eta}{\ell^2} + \frac{2z\zeta}{\ell^2} - \frac{R^2}{\ell^2} .$$

Voor $|q| < 1$ is

$$(1-q)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{q}{2} + \ldots .$$

Verder is

$$|q| < \frac{2|x|}{\ell} + \frac{2|y|}{\ell} + \frac{2|z|}{\ell} + \frac{R^2}{\ell^2} < \frac{6R}{\ell} + \frac{R^2}{\ell^2} < \frac{7R}{\ell} < \frac{7}{8}$$

Dus geldt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell}\left(1 + \frac{x\xi}{\ell^2} + \frac{y\eta}{\ell^2} + \frac{z\zeta}{\ell^2} + \ldots\right)$$

Deze reeks is uniform convergent binnen B voor elk punt (ξ,η,ζ) op S. Integratie over S geeft het verlangde resultaat.

De resultaten van de theorie van de analytische functies zijn als gevolg hiervan van toepassing op de harmonische functies. Bij voorbeeld:

Is de harmonische functie u harmonisch in Ω en is $u = 0$ in een open verzameling $\omega \subset \Omega$, dan is u identiek nul.

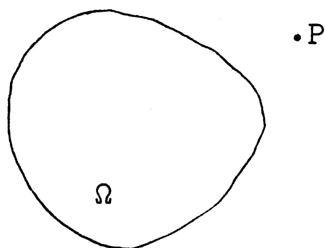
Zijn u_1, u_2 harmonisch in Ω en is $u_1 = u_2$ in een gebied $\omega \subset \Omega$, dan is $u_1 = u_2$ op Ω.

De theorie van de analytische functies van meer veranderlijken is overigens veel moeilijker dan die van één veranderlijke.

I.7. Integraal van Poisson

In de integraal-representatie van een harmonische functie u, als in I behandeld, komen voor de waarden van u en $\frac{du}{dn}$ op de rand $\partial\Omega$. Men kan de indruk hebben dat u en $\frac{du}{dn}$ kunnen worden voorgeschreven

op de rand van een gebied, waardoor dan via de integraalformule een harmonische functie zou zijn bepaald. Dit is onjuist. Het probleem van Dirichlet zegt dat alleen de waarden van de functie kunnen worden voorgeschreven (we komen daar later op terug), niet bovendien nog die van een afgeleide. De waarden van u en $\frac{du}{dn}$ zijn niet onafhankelijk van elkaar. Men kan dit nog als volgt inzien.



Zij u harmonisch in Ω. Zij P een punt buiten $\overline{\Omega}$ en geef met r aan de afstand van P. Dan is $\frac{1}{r}$ harmonisch in Ω en volgens de formule van Green geldt dus

$$\iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Aldus zijn oneindig veel relaties op te schrijven tussen u en $\frac{du}{dn}$. Deze situatie geldt algemeen voor elliptische differentiaaloperatoren en Δ is elliptisch. Voor de hyperbolische is de zaak geheel [zie mijn dictaat partiële differentiaalvergelijkingen]. De parabolische sluiten zich meer bij de elliptische aan (deze vallen dan ook onder de axiomatische theorie; de hyperbolische niet).
Voor het geval van een harmonische functie in een bol kunnen we van de methode als in dit voorbeeld gebruik maken om $\frac{du}{dn}$ te elimineren. Zij u harmonisch in Ω en zij B een bol $\overline{B} \subset \Omega$. We leiden een formule af voor u in B (denk aan randmoeilijkheden in Ω). We hebben

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{du}{dn}\cdot\frac{1}{r}\right) d\sigma. \qquad (1)$$

Zij v harmonisch in Ω. Dan is

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B} \left(u \frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma = 0. \qquad (2)$$

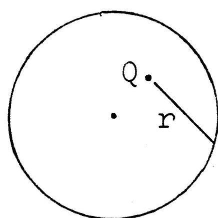
Trek (1) en (2) af:

$$u(P) = \overbrace{-\frac{1}{4\pi}\iint u \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint u\frac{dv}{dn}\,d\sigma}^{I} + \overbrace{\frac{1}{4\pi}\iint \frac{du}{dn}\frac{1}{r}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint v\frac{du}{dn}\,d\sigma}^{II}.$$

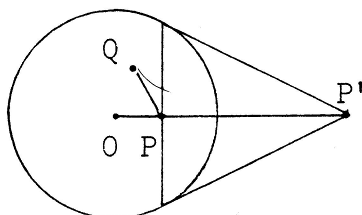
We trachten v zó te kiezen dat $G = \frac{1}{r} - v$ op de rand van B nul wordt. Dan is II = 0 en men vindt na herleiding

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B} u\frac{dG}{dn}\,d\sigma.$$

Er blijft nog v te bepalen. Denken we P vast in B, dan is $\frac{1}{r}$ (r afstand tot P) een harmonische functie in B, behalve in P waar de functie een singulariteit heeft.



v is de harmonische functie die op ∂B randwaarden heeft gelijk aan $\frac{1}{r}$. Dan wordt G een harmonische functie in B met singulariteit in P; G is een functie van P en van het variabele punt Q in B. Zij heeft de naam functie van Green. In de verdere theorie worden die algemeen gedefinieerd voor open verzamelingen Ω. Voor de bol kunnen we G elementair aangeven.



Zij P' het punt op de lijn door O en P zó dat $\overline{OP}\cdot\overline{OP'} = R^2$ (R straal van de bol). Geven we met x aan het punt P, met x' het punt P', met y het punt $Q \in B$ dan is

$$G(x,y) = \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{R}{\|x\|}\,\frac{1}{\|x'-y\|}\,.$$

Voor vaste x is deze functie een harmonische functie van y, met de verlangde singulariteit. Onderzoek zelf de randwaarden met elementaire meetkunde.

Aanwijzing. Is A een punt van ∂B dan is

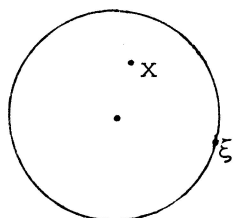
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP'}} = \text{constant}$$

als A de rand van de bol doorloopt.

Opgave. Ga na dat

$$G(x,y) = G(y,x).$$

Na invulling en herleiding vindt men



$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \iint u(\xi)\frac{R^2-\|x\|^2}{\|x-\xi\|^3}\, d\omega_\xi .$$

Dit is de zogenaamde integraal van Poisson.

De onder het integraalteken voorkomende functie waarmee $u(\xi)$ wordt vermenigvuldigd heet de Poisson-kern K; $K > 0$ in B. In $\mathbb{R}^n$ kan men een analoge formule afleiden. De kern K heeft dan in de noemer $\|x-\xi\|^n$.

Vraag. Wat levert deze integraal op in het middelpunt van de bol?

Opgave. Ga in de verschillende leerboeken de afleiding na van de formule van Poisson.

Deze betrekking is in recente jaren het uitgangspunt geweest voor mogelijke generalisaties voor willekeurige gebieden (rand van Martin).

Deze betrekking is afgeleid voor een bol B waarvoor $\overline{B} \subset \Omega$, waarbij u harmonisch is in Ω. Maar we kunnen deze vergelijking nu algemener neerschrijven.

Zij op ∂B gegeven een functie f, voorlopig alleen sommeerbaar. Vorm dan

$$I_f(x) = \iint_{\partial B} f(\xi)K(x,\xi)\,d\omega_\xi .$$

Dan geldt:

(a) I_f is een harmonische functie binnen B. Men toont door berekening aan dat K een harmonische functie van x is voor elke ξ.

(b) Als $f = C$ (constante) is $I_f = C$. Volgt uit rotatie-invariantie.

(c) Zij f continu. Zij ξ_0 een vast maar willekeurig randpunt. Dan

is

$$\lim_{x\to\xi_0} I_f(x) = f(\xi_0).$$

<u>Bewijs</u>.

We laten zien dat

$$\limsup_{x\to\xi_0} I_f \leqslant f(\xi_0).$$

Zij $A > f(\xi_0)$. We tonen aan dat

$$\limsup I_f \leqslant A,$$

waarmee de vorige ongelijkheid bewezen zal zijn. Te bewijzen dus

$$\limsup(I_f - A) \leqslant 0.$$

Nu is $I_f - A = I_f - I_A = I_{f-A}$; zodat te bewijzen is

$$\limsup I_{f-a} \leqslant 0.$$

Zij ω een omgeving van ξ_0 zó dat $f < A$ in ω (continuïteit van f). Dan is

$$I_{f-A}(x) = \int_{\omega} + \int_{\partial B-\omega} = I_1 + I_2.$$

$I_1 \leqslant 0$ want $K > 0$. I_2 is continu in de omgeving van ξ_0 en $= 0$ in ξ_0 (zie de formule). Daaruit volgt het te bewijzen. Analoog bewijst men

$$\liminf I_f \geqslant f(\xi_0),$$

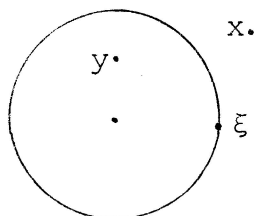
waarmee het bewijs is voltooid.

Scherper: $I_f \to f$ in elk punt van ∂B waar f continu is.

Hiermede is het probleem van Dirichlet voor de bol opgelost. Later zal blijken dat er veel meer gebieden bestaan waarvoor het probleem oplosbaar is, met dien verstande dat men maar zelden in staat is een expliciete uitdrukking voor de oplossing te geven. Deze gebieden noemt men <u>regulier</u>. Er bestaan echter ook gebieden waarvoor het probleem niet oplosbaar is; we geven later een voorbeeld.

In de axiomatische theorie wordt als axioma aangenomen de existentie van een basis van reguliere verzamelingen (dit begrip moet op adequate wijze worden ingevoerd) voor de topologie van de ruimte. Aan dit axioma wordt voor $\mathbb{R}^n$ voldaan omdat de bollen regulier zijn.

Bijzondere gevallen



(1) Beschouw een bol B en een punt $x \notin \overline{B}$. Pas de formule toe op de randwaarden $\frac{1}{\|x-\xi\|}$. Dan is dus

$$\frac{1}{\|y-x\|} = \int \frac{1}{\|x-\xi\|} K(y,\xi)d\omega_\xi \quad (y \in B).$$

In het linkerlid staat nl. de harmonische functie met randwaarden $\frac{1}{\|x-\xi\|}$.

Uit het geval van randwaarden gelijk aan 1 volgt

$$1 = \int K(y,\xi)d\omega_\xi .$$

Men kan deze resultaten als volgt interpreteren.

Beschouw enerzijds de discrete maat 1 met drager het punt y.

Beschouw anderzijds de maat met drager ∂B bepaald door de dichtheidsfunctie $K(y,\xi)$; d.w.z. is e een meetbare verzameling e op ∂B, dan is

$$m(e) = \int_e K(y,\xi)d\omega_\xi .$$

Dan zegt de formule van Poisson dat beide maten buiten B gelijke potentiaal hebben. Anders gezegd: de potentiaal blijft buiten B invariant bij een transformatie van de maat 1 in $\{y\}$ in een maat m, met gelijke totale maat, op ∂B. Men toont gemakkelijk aan dat in B de potentiaal door deze transformatie kleiner wordt, d.w.z.

$$\frac{1}{\|y-z\|} > \int \frac{1}{\|z-\xi\|} K(y,\xi)d\omega_\xi , \qquad z \in B.$$

Dit is een voorbeeld van de balayage-methode, waarvan al eerder een voorbeeld is gegeven in I.5.

Men kan dit geval overigens gemakkelijk uitbreiden tot het algemenere geval van een positieve maat met drager $\overline{B}$, gedefinieerd met behulp van de dichtheidsfunctie f. Dat is een kwestie van integratie. De maat wordt dan eveneens getransformeerd in een maat op ∂B zó dat de potentiaal buiten B gelijk blijft. Deze methode werd gebruikt door Poincaré voor de oplossing van het probleem van Dirichlet onder bepaalde condities.

(2) Zij Σ een meetbare deelverzameling van ∂B (bijv. een Borelverzameling). Neem als randwaarden op ∂B de functie die = 1 op Σ en = 0 op $\partial B - \Sigma$. Deze functie χ is sommeerbaar en men kan de Poisson-integraal opmaken

$$\mu(\Sigma) = \int_{\partial B} \chi(\xi) K(x,\xi) d\omega_\xi .$$

$\mu(\Sigma)$ is een maat van de verzameling Σ en laat men Σ de familie van de meetbare verzamelingen doorlopen, dan wordt een maat op ∂B gedefinieerd. De waarde van de maat hangt af van het punt $x \in B$. We geven de maat daarom aan met μ_x. Vergelijk nu de in I.5 ingevoerde maat op een vlak t.o.v. een halfruimte. μ_x heet de <u>harmonische maat</u> t.o.v. de bol. Met deze harmonische maat kan de integraal van Poisson geschreven worden als Stieltjes-integraal

$$I_f(x) = \int_{\partial B} f(\xi) d\mu_x(\xi) .$$

Later vinden we deze integraal terug in de algemene situatie; hij wordt dan als Radon-integraal gedefinieerd.

I.8. Stellingen van Harnack

Uit de integraalformule van Poisson volgen belangrijke ongelijkheden.

Zij u harmonisch in de bol B; stel $u \geqslant 0$. Dit impliceert $u > 0$ in B wegens het minimumprincipe. Men heeft dus

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int u(\xi) \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x-\xi\|^3} \, d\omega_\xi .$$

Nu is

$$R - \|x\| \leqslant \|x-\xi\| \leqslant R + \|x\| ,$$

waaruit dan volgt na enige herleiding:

$$R \frac{R-\|x\|}{(R+\|x\|)^2} u(0) \leqslant u(x) \leqslant R \frac{R+\|x\|}{(R-\|x\|)^2} u(0).$$

Dit zijn de ongelijkheden van Harnack.

Hiermee bewijst men vele eigenschappen van harmonische functies. Daarbij moet men bedenken dat de grenzen in het linker- en rechterlid alleen afhangen van $\|x\|$ en de waarde van u in het middelpunt van de bol.

(i) Zij gegeven in een open verzameling Ω een stijgende rij harmonische functies (u_n); dus $u_{n+1} \geqslant u_n$. Stel er is een $x_0 \in \Omega$ zó dat $\lim_{n\to\infty} u_n(x_0)$ bestaat.

Bewering: dan bestaat $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$ voor alle $x \in \Omega$ en de convergentie is lokaal uniform, d.w.z. uniform op elke compacte $K \subset \Omega$.

Bewijs. Beschouw $v = u_n - u_m$, $n > m$. Dan is $v \geqslant 0$. Uit de ongelijkheden van Harnack volgt in een bol B om x_0, $\overline{B} \subset \Omega$, toegepast op v

$$0 \leqslant v(x) \leqslant R \frac{R+\|x\|}{(R-\|x\|)^2} v(x_0).$$

Hieruit volgt de uniforme convergentie van de rij in B. Door toepassing van de overdekkingsstelling volgt dan lokale uniforme convergentie (Ω samenhangend ondersteld).

Uit de formule van Poisson volgt dat de limiet harmonisch is (pas toe dat $f_n \to f \Rightarrow I_{f_n} \to I_f$).

(ii) Zij (u_n) een stijgende rij harmonische functies. Dan geldt het alternatief

$$\lim u_n(x) = \infty \text{ voor alle } x \in \Omega$$

òf

$\lim u_n(x)$ bestaat lokaal uniform in Ω en de limiet is harmonisch

Dit is een gevolg van (i).

(iii) Zij $\mathcal{F}$ een familie van harmonische functies $u \geqslant 0$. Dan geldt het alternatief

$$\sup_{\mathcal{F}} u = +\infty \text{ overal}$$

òf

$$\sup_{\mathcal{F}} u \text{ is lokaal begrensd.}$$

Opgave. Geef een overzicht van de verschillende convergentiestellingen in de diverse leerboeken die volgen uit de ongelijkheden van Harnack.

De eigenschap (ii) wordt in de axiomatische potentiaaltheorie als axioma ingevoerd omdat het schovenaxioma op zichzelf nog te zwak is.

HOOFDSTUK II

Superharmonische functies

Voorbereiding

We behandelen de theorie in $\mathbb{R}^3$. De gebruikte integralen zijn Lebesgue-integralen, zodat de benodigde limietovergangen onder het integraalteken kunnen plaatsvinden. Voor een goede behandeling van super- en subharmonische functies is het nodig een ruimere klasse dan de continue functies te gebruiken, nl. de semi-continue functies. Een functie f heet beneden semi-continu indien er voor elke $\varepsilon > 0$ een omgeving van x_0 is zó dat

$$f(x) \geqslant f(x_0)-\varepsilon$$

in die omgeving. Deze definitie is equivalent met

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Analoog boven semi-continu. Een veel gebruikte eigenschap is de volgende:

Is f beneden semi-continu dan is er op elke compacte $S \subset \Omega$ een stijgende rij continue functies ϕ_i met $\lim \phi_i = f$ op S. Omgekeerd: is (ϕ_i) een stijgende rij continue functies, dan is $\sup \phi_i$ beneden semi-continu.

II.1. Superharmonische functies

Definitie. Een functie $u > -\infty$ heet superharmonisch in een gebied Ω indien

1. u is beneden semi-continu
2. voor elke bol B met $\overline{B} \subset \Omega$ en middelpunt x_0 geldt $u(x_0) \geqslant \mathcal{M}_u^r(x_0)$.

Een functie u heet subharmonisch indien $-u$ superharmonisch is. De waarde $+\infty$ is een toegestane waarde voor een superharmonische functie.

Men kent in de literatuur het begrip superharmonisch in uitgebreide zin en daaronder vallen functies die overal $+\infty$ zijn; daarop wordt in dit college niet ingegaan. Men kan, zoals bij harmonische functies, de definitie ook geven met behulp van het ruimtelijk gemiddelde.

Om een beeld te krijgen van de theorie kan men voor een aantal stellingen volstaan met het beschouwen van continue superharmonische functies, wat eenvoudiger is.

II.2. Eigenschappen

(1) u harmonisch $\Rightarrow$ u superharmonisch

u super- en subharmonisch $\Rightarrow$ u harmonisch

u,v superharmonisch $\Rightarrow$ $\lambda u+\mu v$ superharmonisch voor alle $\lambda,\mu \geqslant 0$.

De superharmonische functies vormen geen vectorruimte. Men kan aantonen dat het voldoende is de conditie 2 in de definitie te verlangen voor alle bollen met voldoend kleine straal. Superharmoniciteit is een locale eigenschap.

(2) Zij u superharmonisch in Ω. Stel u bereikt een locaal minimum in $x_0 \in \Omega$. Dan is u constant in een omgeving van x_0 (minimumprincipe).

Was $u(x) \geqslant u(x_0)$ in B, dan was $\mathcal{A}(x_0) \geqslant u(x_0)$; maar wegens de superharmoniciteit $u(x_0) \geqslant \mathcal{A}(x_0)$, dus $u(x_0) = \mathcal{A}(x_0)$. Stel nu $u(x_1) > u(x_0)$, dan was er een omgeving V van x_1 waarin $u(x) > u(x_0)+\varepsilon$ voor een passende $\varepsilon > 0$ (semi-continu). Dat leidt tot een contradictie met $u(x_0) = \mathcal{A}(x_0)$.

(3) Zij u superharmonisch in Ω. Zij h harmonisch in Ω en stel

$$\liminf_{x\to\xi}(u(x)-h(x)) \geqslant 0$$

voor elk randpunt $\xi \in \partial\Omega$. Dan is $u \geqslant h$ in Ω.

Dit is een gevolg van het minimumprincipe (bedenk dat u-h superharmonisch is).

Hieruit volgt: is $\liminf_{x \to \xi} u(x) \geq m$, dan is $u(x) \geq m$ voor alle $x \in \Omega$.

(4) Zij u superharmonisch in Ω. Zij B een bol, $\overline{B} \subset \Omega$. Beschouw de integraal van Poisson I_u in B voor randwaarden gelijk aan de restrictie van u tot ∂B. Dan geldt in B

$$I_u \leq u.$$

Bewijs. Zij ϕ een continue functie op ∂B en stel $u \geq \phi$. Dan is, als $x \in B$, $\xi \in \partial B$,

$$\liminf_{x \to \xi}(u(x)-I_\phi(x)) \geq u(x)-\phi(x) \geq 0.$$

Dus is $u \geq I_\phi$ in B.

Nu is op elke compacte verzameling u de limiet van een stijgende rij continue functies. Dat geeft (integraalrekening)

$$I_u = \sup I_\phi \qquad (\phi \leq u)$$

en dus $I_u \leq u$.

(5) Zij u superharmonisch in Ω. Definieer een functie v op Ω door

$$v = \begin{cases} u \text{ op } \Omega-B \\ I_u^B \text{ op } B \end{cases}$$

Bewering: v is superharmonisch in Ω.

Men moet de beide condities uit de definitie II.1 verifiëren. De tweede conditie geeft geen moeilijkheden wegens eigenschap (4) (integraalrekening). Is u continu, dan is de eerste conditie evident (eigenschappen van de Poisson-integraal). Is u slechts semi-continu dan vereist die conditie nadere verificatie; dat gebeurt op analoge wijze als bij het randgedrag van de Poisson-integraal, waarop we niet in detail ingaan.

Deze eigenschap kan aanzienlijk worden gegeneraliseerd door in plaats van een bol te nemen een gebied Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, en daarbij te nemen de

oplossing van het probleem van Dirichlet voor Ω_1; er komen dan wel randmoeilijkheden. Sommige schrijvers hebben deze eigenschap genomen als definitie van de superharmonische functie.

(6) Zij u een functie in Ω die tweemaal continu differentieerbaar is. Dan geldt:

Nodig en voldoende dat u superharmonisch is, is dat $\Delta u \leqslant 0$ in Ω.

Zij u superharmonisch. Pas de stelling van Green toe op een bol B, $\overline{B} \subset \Omega$. Dat geeft

$$\iiint_B \Delta u \, d\omega = \iint_{\partial B} \frac{du}{dn} \, ds.$$

Men bewijst gemakkelijk dat het gemiddelde van u over een boloppervlak een dalende functie van r is (d.w.z. ten opzichte van stijgende r). Daaruit volgt dat het rechterlid $\leqslant 0$ is, waaruit men concludeert tot $\Delta u \leqslant 0$. Dat de conditie voldoende is, bewijst men op analoge wijze.

Onder voldoende beperkende bepalingen geldt voor de potentiaal van een positieve maat de vergelijking van Poisson $\Delta u = -4\pi\rho$. Daaruit volgt $\Delta u \leqslant 0$. Dus:

De potentiaal van een posititieve maat is superharmonisch.

(7) Voor rijen van superharmonische functies gelden convergentiestellingen, te vergelijken met die van Harnack, maar er zijn moeilijkheden in verband met de semi-continuïteit (het infimum van een dalende rij van beneden semi-continue functies behoeft niet semi-continu te zijn).

(i) Zij $u_1, \ldots, u_n$ superharmonisch, dan is $\min(u_1, \ldots, u_n)$ superharmonisch.

(ii) Is (u_i) een stijgende rij van superharmonische functies, dan is $\lim u_i = u$ superharmonisch.

II.2. Voorbeelden

(1) f harmonisch in Ω $\Rightarrow$ $|f|$ subharmonisch in Ω

$-|f|$ superharmonisch in Ω

(2) In $\mathbb{R}^2$:

f,g harmonisch $\Rightarrow$ $|f+ig|$ subharmonisch

f complex analytisch $\Rightarrow$ $|f|$ subharmonisch. Bewijzen evident.

Zij f een analytische functie in Ω van de complexe variabele z. Dan is $z \mapsto \log|f(z)|$ subharmonisch (op te vatten als functie van de variabelen x en y met $z = x+iy$). Pas het locale criterium toe (denk aan de nulpunten van f). In het bijzonder: als $f(z) = z-z_0$

$$(x,y) \mapsto \log|z-z_0|^{-1} \qquad (z = x+iy)$$

is superharmonisch.

(3) In $\mathbb{R}^3$:

$$x \mapsto \frac{1}{\|x-x_0\|} \qquad (x,x_0 \in \mathbb{R}^3)$$

is superharmonisch.

De functie ϕ gedefinieerd door

$$\phi(x) = \|x-x_0\|$$

is subharmonisch. Geef zelf het bewijs.

(4) Potentialen

Zij μ een positieve maat in $\mathbb{R}^3$ met compacte drager S. Stel

$$\phi_p(x,y) = \min(\|x-y\|^{-1},p), \qquad p > 0.$$

Dan is

$$x \mapsto \phi_p(x,y)$$

superharmonisch (minimum van eindig aantal superharmonische functies). Dan is ook

$$x \mapsto \int \phi_p(x,y)d\mu(y)$$

superharmonisch. Dit is een stijgende functie van p; daaruit volgt dat de potentiaal ($p \to \infty$)

$$U^\mu(x) = \int_S \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|}$$

superharmonisch is.

(5) Potentiaal van Green

Zij $B(x_0,R)$ een open bol in $\mathbb{R}$. Bij de afleiding van de integraal van Poisson is de functie van Green voor B al ingevoerd. Ik herhaal:

Zij $y \in B$ vast. Zij h_y de functie gedefinieerd door

$$x \mapsto \|x-y\|^{-1}.$$

Vorm met randwaarden gelijk aan de restrictie van h tot ∂B de integraal van Poisson voor B; we geven die aan met I_{h_y}.

Definitie. Onder de functie van Green G_y met pool y verstaat men de functie die in B is gedefinieerd door

$$G_y : x \mapsto h_y(x) - I_{h_y}(x).$$

Voor een expliciete formule voor I zie voren.

Eigenschappen

(1) G_y is harmonisch in $B-\{y\}$.

(2) G_y nadert tot 0 als $x \to$ randpunt.

(3) G_y heeft in y dezelfde singulariteit als h_y.

(4) Voor $x,y \in B$ geldt

$$G_y(x) = G_x(y).$$

Deze betrekking is vroeger al genoemd.

Op grond van (4) kunnen we spreken van de functie van Green t.o.v. B zonder meer als symmetrische functie van de punten x en y. Ze wordt aangegeven door G.

Opmerking. Als $R \to \infty$, nadert I tot 0 en dan gaat G over in de Newtonpotentiaal $\frac{1}{r}$. Voor $R < \infty$ is G niet in geheel $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd.

Definitie. Zij μ een positieve maat op B met $\mu(B) < \infty$. Onder de potentiaal van Green voor B verstaat men de functie

$$G\mu : x \mapsto \int_B G(x,y)\,d\mu(y).$$

(1) $G\mu$ is superharmonisch in B. Bewijs door toepassing van de definitie van superharmonische functies en convergentie-eigenschappen.

(2) $G\mu \geqslant 0$ want $G > 0$ en $\mu \geqslant 0$.

(3) De grootste harmonische minorant van $G\mu$ in B is de functie die identiek 0 is.

Toelichting. Onder een harmonische minorant van een superharmonische functie u in Ω verstaat men een harmonische functie ϕ in Ω waarvoor geldt $\phi \leqslant u$. Een harmonische minorant behoeft niet te bestaan.

Voorbeeld: beschouw $\mathbb{R}^1$. Daarin zijn de superharmonische functies de convexe functies; de harmonische functies zijn de lineaire. De functie $x \mapsto \log x$ heeft geen harmonische minorant op $(0,1)$, wel op $(\delta,1)$ als $0 < \delta < 1$.

Als er harmonische minoranten bestaan, is er ook een grootste.

De eigenschap (3) bewijzen we hier niet. Heuristisch: $G \to 0$ op de rand en dat leidt ertoe dat de grootste harmonische minorant 0 is.

In een later stadium van de theorie voert men het begrip potentiaal van Green op analoge wijze in voor een willekeurig gebied Ω; het is dan een op Ω gedefinieerde functie met analoge eigenschappen (er zijn echter randmoeilijkheden). De potentiaal van Green vervult dan voor Ω een rol overeenkomstig de Newton-potentiaal voor $\mathbb{R}^3$.

In de axiomatische theorie dient de eigenschap (3) als middel om potentialen te definiëren. Let wel, dat kan dan niet met het begrip euclidische afstand omdat de "harmonische functies" in die theorie worden gedefinieerd op een topologische ruimte. De potentialen van Green spelen op grond daarvan een belangrijke rol, o.a. voor de stelling van Riesz die een representatie geeft van superharmonische functies als som van een potentiaal van Green en een harmonische functie (te bewijzen met de theorie van de distributies).

HOOFDSTUK III

Het probleem van Dirichlet

Het probleem luidt:

Gegeven zij een open verzameling Ω (ik onderstel Ω ter vereenvoudiging samenhangend en begrensd) en op de rand $\partial\Omega$ een continue functie f. Gevraagd wordt een functie u, gedefinieerd op Ω en harmonisch in Ω die continu kan worden uitgebreid tot $\bar{\Omega}$ zodanig dat restrictie van die uitbreiding tot $\partial\Omega$ gelijk is aan f.

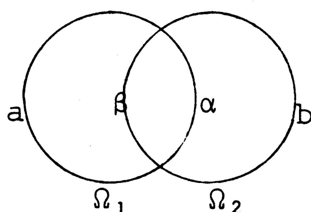
Voor een bol is hiervoor de oplossing expliciet gegeven. Er zijn procédé's ontwikkeld om dit probleem op te lossen. Enkele klassieke methoden zijn de volgende

III.1. Oplossingsmethoden

1. Het alternerende procédé van Schwarz

Volgens dit procédé kan men de existentie bewijzen voor gebieden, die zijn samengesteld uit gebieden waarvoor de existentie al bewezen is.

Laten Ω_1 en Ω_2 open verzamelingen en $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ zijn.



Stel voor Ω_1 en Ω_2 is de existentie bewezen (d.w.z. voor alle continue randwaarden). Dan bewijst men de oplosbaarheid voor $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Neem op α randwaarden die continu aansluiten bij f op a. Daarbij behoort een harmonische functie u_1 in Ω_1. De restrictie van u_1 tot β voert tot randwaarden op $\partial\Omega_2$ en tot een harmonische functie v_1 in Ω_2. Zet dit procédé voort. Men vindt twee rijen van harmonische functies (u_i) in Ω_1 en (v_i) in Ω_2. Men bewijst met de convergentiestellingen van Harnack:

de reeks $u_1+(u_2-u_1)+\dots$ convergeert in Ω_1 naar een harmonische

functie u in Ω_1;

de reeks $v_1+(v_2-v_1)+\ldots$ convergeert in Ω_2 naar een harmonische functie v in Ω_2.

In $\Omega_1 \cap \Omega_2$ is u = v en men bewijst dat aldus een harmonische functie is bepaald in $\Omega_1 \cup \Omega_2$ met de goede randwaarden.

2. <u>De balayage-methode van Poincaré</u>

Uitgaande van de Poisson-integraal wordt aan (Ω,f) een harmonische functie toegevoegd die onder zekere restricties t.a.v. $\partial\Omega$ de oplossing van het probleem van Dirichlet is. Men maakt gebruikt van de eerder genoemde transformatie van maten.

3. <u>Het procédé van Wiener</u>

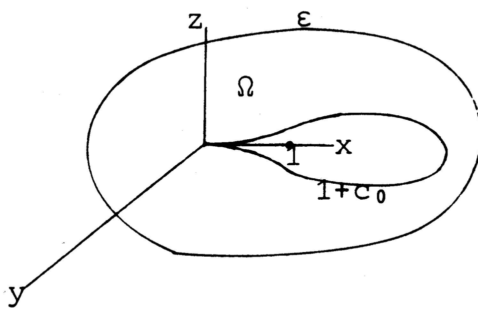
Men breidt de continue randwaarden uit tot een continue functie op $\overline{\Omega}$ (dat kan; ga het bewijs na in de literatuur). Dan approximeert men Ω door een rij open verzamelingen (Ω_n) waarvoor het probleem oplosbaar is; de mogelijkheid daarvan bewijst men met het procédé van Schwarz. Dat voert tot een rij harmonische functies (u_n), gedefinieerd op Ω_n, die convergeert naar een harmonische functie. Volgens dit procédé wordt aan (Ω,f) een harmonische functie toegevoegd. Onder zekere restricties ten aanzien van $\partial\Omega$ (waarover later nader) is die functie de verlangde harmonische functie (er zijn randmoeilijkheden).

4. Er is nog een procédé van Neumann, dat hier niet wordt besproken (men gebruikt potentialen van dubbellagen).

<u>Opgave</u>. Geef een overzicht van de verschillende procédé's; zie in Kellogg.

Er is nog een belangrijke methode van Perron, die uitvoerig zal worden behandeld. Eerst wordt een voorbeeld behandeld waaruit blijkt dat het probleem niet altijd oplosbaar is.

III.2. Voorbeeld.



Op het segment I: $\{(\xi,0,0) | 0 \leq \xi \leq 1\}$ beschouwt men een maat lineair toenemend van 0 tot 1. De potentiaal u in een punt (x,y,z) is

$$u(x,y,z) = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{((\xi-x)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{(\xi-x)d\xi}{N} + x \int \frac{d\xi}{N} .$$

Berekening geeft

$$u(x,y,z) = [(1-x)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ x \log|1-x+[(1-x)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}| +$$

$$+ x \log|x+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}| - x \log(y^2+z^2).$$

Als $(x,y,z) \to (0,0,0)$ naderen de eerste drie termen tezamen tot 1. Neem $x > 0$; dan nadert de vierde term tot 0. Het resultaat is

$$\lim_{\substack{\|(x,y,z)\| \to 0 \\ x>0}} u(x,y,z) = 1 - \lim_{\substack{\|(x,y,z)\| \to 0 \\ x>0}} x \log \rho^2 \qquad \rho = y^2+z^2.$$

Men onderscheidt de volgende gevallen:

1e. Neem $x > 0$. Stel $(x,y,z) \to (0,0,0)$ over een weg waarvoor $x^k = \rho^2$ (k geheel positief). Dan $\lim u = 1$.

2e. Neem $x > 0$. Stel $(x,y,z) \to (0,0,0)$ langs een weg $\rho = \exp(-\frac{c}{2x})$, $c > 0$. Dan geldt $\lim u(x,y,z) = 1+c$.

3e. $\lim_{\|(x,y,z)\| \to \infty} u(x,y,z) = 0$

Zij nu $0 < \varepsilon < 1$, $c_0 > 0$. Beschouw.

$$\Omega = \{(x,y,z) | \varepsilon < u(x,y,z) < 1+c_0\}.$$

$u \to +\infty$ als $(x,y,z) \to$ punt op I met $0 < x < 1$. Uit een en ander volgt $\Omega \subset \complement I$ (complement van I) en $(0,0,0) \in \partial\Omega$.

Stel nu het probleem van Dirichlet met randwaarden ε op de rand van

het gebied waar $u < \varepsilon$ en randwaarden $1+c_0$ op de rand van het gebied waar $u < 1+c_0$. Neem $0 < c < c_0$. In de omgeving van (0,0,0) ligt het oppervlak

$$\rho = \exp(-\frac{c}{2x}), \quad x > 0$$

in Ω. Op dit oppervlak naar 0 lopende nadert $u(x,y,z)$ tot $1+c < 1+c_0$.

De geconstrueerde functie u is harmonisch in Ω en nadert overal tot de goede randwaarden behalve in (0,0,0), d.w.z. u is niet continu uit te breiden tot $\overline{\Omega}$.

Het punt (0,0,0) is een zogenaamd irregulier randpunt van Ω. Het gebied Ω is niet enkelvoudig samenhangend, maar zoals uit de verdere theorie zal blijken kan men dat desgewenst gemakkelijk verhelpen.

III.3. De methode van Perron

Nu het probleem van Dirichlet blijkbaar niet steeds oplosbaar is, zoekt men een andere weg. Men probeert aan een gebied Ω met randwaarden f een harmonische functie toe te voegen die met de oplossing van het probleem van Dirichlet overeenstemt indien die bestaat. Het vroeger beschreven procédé van Wiener is zo'n methode.

Een andere methode is die van Perron.

Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ open en begrensd; op $\partial\Omega$ zij gegeven een niet noodzakelijk continue functie f. Men beschouwt twee families van functies.

1e. De familie Φ_f^Ω van de functies v die in Ω superharmonisch zijn, naar beneden begrensd en waarvoor in elk randpunt $\xi \in \partial\Omega$ geldt

$$\liminf_{x\to\xi} v(x) \geq f(\xi), \quad x \in \Omega.$$

Definieer

$$\overline{H}_f^\Omega = \inf_{v\in\Phi} v.$$

2e. De familie Ψ_f^Ω van alle naar boven begrensde subharmonische functies u in Ω waarvoor in elk randpunt geldt

Toevoeging bij het voorbeeld van blz. 32

Er moet nog worden bewezen, dat er geen van u verschillende, harmonische functie v bestaat die in alle randpunten de goede randwaarden (nl resp. ε en $1+c_0$) heeft. Beschouw het verschil u-v. Deze functie nadert in alle randpunten, uitgezonderd één ervan, tot 0 en overigens is zij begrensd. Noem dit randpunt ξ en de euclidische afstand tot ξ zij r. Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$

$$|u-v| < \frac{\varepsilon}{r} .$$

Dit volgt uit vergelijking van de randwaarden. Daaruit volgt $u = v$.

$$\limsup_{x \to \xi} u(x) \leqslant f(\xi), \quad x \in \Omega.$$

Stel

$$\underline{H}_f^\Omega = \sup_{u \in \Psi} u.$$

<u>Stelling. $\overline{H}_f^\Omega$ is harmonisch in</u> Ω.

<u>Bewijs</u>. Zij B een bol, $\overline{B} \subset \Omega$. Zij $v \in \Phi$. Definieer v' door

$$v' = \begin{cases} v \text{ in } \Omega - B \\ \text{in } B \text{ integraal van Poisson voor} \\ B \text{ met randwaarden } v. \end{cases}$$

Uit de eigenschappen van de superharmonische functies volgt $v' \in \Phi_f^\Omega$ en $v' \leqslant v$. Dan is

$$\overline{H}_f^\Omega = \inf_{v \in \Phi} v = \inf_{v' \in \Phi} v'.$$

In B is $\overline{H}_f^\Omega$ dus het infimum van Poisson-integralen, dus van harmonische functies. Uit de convergentiestellingen volgt dan dat $\overline{H}_f^\Omega$ harmonisch is in B, dus in Ω.

<u>Opmerkingen</u>. 1. Voor rijen van harmonische functies kan men de stelling van Harnack toepassen; hier gaat het over een familie van functies en dan zijn wat meer voorzorgen nodig. Ga het bewijs na in de literatuur.

2. Stel $m \leqslant f(\xi) \leqslant M$ voor $\xi \in \partial\Omega$. Dan behoort de functie die in Ω identiek gelijk is aan M tot Φ, de functie identiek m tot Ψ.

3. Men beschouwt ook het geval waarbij $+\infty$ een toegelaten waarde van f is. Dan zijn voorzorgen nodig ten aanzien van het geval dat $\overline{H} = +\infty$.

4. In het hier beschouwde geval zijn de klassen Φ en Ψ niet leeg en niet triviaal. Men kan de theorie ook opstellen op Riemann-oppervlakken en dan kan zich het geval voordoen dat het procédé niets oplevert. Op een <u>compact</u> Riemann-oppervlak zijn nl. alle naar beneden begrensde superharmonische functies constant wegens

de minimumeigenschap. Vergelijk de eigenschap dat een in de gehele ruimte begrensde harmonische functie constant is.

Eigenschappen

1. Zij f continu. Is het probleem van Dirichlet oplosbaar voor (Ω, f), stel door F, dan is $\overline{H}_f = \underline{H}_f = F$. Want dan is

$$F \in \Phi \quad \text{en} \quad F \in \Psi.$$

Voor de eigenschappen 2 tot en met 7 wordt f niet continu ondersteld.

2. $$\underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f.$$

Zij $u \in \Psi$, $v \in \Phi$. Dan is u-v subharmonisch.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\sup u(x) \leqslant f(\xi) \\ \lim\inf v(x) \geqslant f(\xi) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\sup(u(x)-v(x)) \leqslant 0.$$

Wegens de maximumeigenschap volgt hieruit $u-v \leqslant 0$ en daarmede de verlangde eigenschap.

3. Voor alle $C \in \mathbb{R}$ geldt

$$\overline{H}_{f+C} = \overline{H}_f + C.$$

Voor $\lambda \geqslant 0$

$$\overline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f; \quad \overline{H}_{-\lambda f} = -\lambda \underline{H}_f.$$

Evident.

4. De afbeelding $f \to \overline{H}_f$ is stijgend bij de natuurlijke ordening, d.w.z.

$$f \leqslant g \Rightarrow \overline{H}_f \leqslant \overline{H}_g.$$

Hieruit volgt

$$\inf f \leqslant \overline{H}_f \leqslant \sup f.$$

5. $$\overline{H}_{f+g} \leqslant \overline{H}_f + \overline{H}_g.$$

Als $v_1 \in \Phi_f$, $v_2 \in \Phi_g$ geldt

$$\liminf (v_1(x)+v_2(x)) \geq f(\xi)+g(\xi)$$

waaruit volgt

$$v_1+v_2 \in \Phi_{f+g}.$$

Dus $v_1+v_2 \geq \overline{H}_{f+g}$ en

$$\overline{H}_f+\overline{H}_g \geq \overline{H}_{f+g}.$$

6. Is (f_n) een stijgende rij en $f = \lim f_n$, dan is

$$\overline{H}_f = \lim \overline{H}_{f_n}.$$

Bewijs in dezelfde trant.

Definitie. De functie f heet oplosbaar (resolutief) indien

$$\overline{H}_f = \underline{H}_f$$

en men noteert die functie dan met H_f.

H_f heet in dat geval de gegeneraliseerde oplossing van het probleem van Dirichlet.

7. Als f en g oplosbaar zijn is voor alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ook $\lambda f+\mu g$ oplosbaar en men heeft

$$H_{\lambda f+\mu g} = \lambda H_f+\mu H_g.$$

Wegens

$$H_f+H_g \leq \underline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_{f+g} \leq H_f+H_g.$$

Het probleem is nu aan te geven welke functies oplosbaar zijn; we geven later de oplossing.

8. Elke continue functie f is oplosbaar.

Het bewijs wordt in enkele stappen gegeven.

(a) Stel f heeft een continue uitbreiding F tot $\overline{\Omega}$ zó dat F superharmonisch is in Ω. Dan is $F \in \Phi_f$ en dus

$$F \geq \overline{H}_f.$$

$$\limsup_{x\to\xi} \overline{H}_f(x) \leq \limsup_{x\to\xi} F(x) = F(\xi) = f(\xi).$$

Dus daar $\overline{H}_f$ harmonisch, dus subharmonisch, is

$$\overline{H}_f \in \Psi_f \Rightarrow \underline{H}_f = \overline{H}_f.$$

(b) Zij f_n oplosbaar; stel $\lim f_n = f$ bestaat uniform. Dan is f oplosbaar en

$$\lim_{n\to\infty} H_{f_n} = H_f.$$

Want voor $n > N(\varepsilon)$ is op $\partial\Omega$

$$f_n - \varepsilon \leqslant f \leqslant f_n + \varepsilon, \quad n > N.$$

Daaruit volgt

$$H_{f_n} - \varepsilon \leqslant \underline{H}_f \leqslant \overline{H}_f \leqslant H_{f_n} + \varepsilon.$$

waaruit de eigenschap volgt.

(c) Elke continue functie op $\overline{\Omega}$ kan uniform worden geapproximeerd door verschillen van continue functies die in Ω superharmonisch zijn.

Uit deze eigenschap, tezamen met (a) en (b) volgt direct dat elke continue f oplosbaar is.

Het bewijs van de hulpeigenschap (c) volgt uit de volgende approximatiestelling (zie Bourbaki, Top. générale Ch. X; het is een vorm van Stone-Weierstrass).

Zij E een compacte ruimte, $C(E, \mathbb{R})$ de ruimte van de continue reële functies op $\mathbb{R}$ met sup norm. Zij V een lineaire deelruimte van C zó dat

(i) de constante functies behoren tot V

(ii) $u \in V \Rightarrow |u| \in V$

(iii) V scheidt de punten van E.

Dan is $\overline{V} = C$.

Pas deze stelling toe op $\overline{\Omega}$ en neem voor V de continue functies die verschillen zijn van superharmonische functies. Deze vormen inderdaad een lineaire ruimte (N.B. voor de continue superharmonische

functies geldt dat niet). Aan (i) is voldaan. Ook (iii) geldt. Neem nl. de functie $x \to -\|x-x_1\|$ ($x_1 \in \Omega$); die is superharmonisch, in x_1 is deze functie 0 en in $x_2 \neq x_1$ is ze $\neq 0$.
Tenslotte (ii). Men heeft

$$\inf(u,v) = \tfrac{1}{2}(u+v - |u-v|),$$

dus

$$|u-v| = u+v - 2\inf(u,v).$$

Met de eigenschappen van superharmonische functies volgt hieruit dat als u en v superharmonisch zijn $|u-v| \in V$. q.e.d.

Opmerking. De harmonische functie, gedefinieerd volgens de methode van Perron kan ook langs functionaal-analytische weg worden geïntroduceerd. Men zie: Brelot, Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, Journal d'analyse math. VIII (1960/61).

III.4. De harmonische maat

Zij f continu op $\partial\Omega$. Zij $x_0 \in \Omega$ vast maar willekeurig. Beschouw de afbeelding $f \mapsto H_f(x_0)$. Dit is een lineaire afbeelding van de ruimte van de continue functies op $\partial\Omega$ (met supnorm) in $\mathbb{R}$. Deze afbeelding is continu wegens

$$\inf f \leqslant H_f \leqslant \sup f.$$

Deze afbeelding brengt dus een Radon-integraal voort (d.w.z. een integraal gedefinieerd als lineaire vorm; zie bijvoorbeeld mijn dictaat abstracte analyse, integraalrekening). Deze maat (integraal) wordt aangegeven door μ_{x_0}. Dus

$$\mu_{x_0}(f) = H_f(x_0)$$

of anders geschreven

$$H_f(x_0) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\mu_{x_0}(y).$$

μ_{x_0} heet de harmonische maat t.o.v. Ω in het punt x_0.
Wat onnauwkeurig geformuleerd kan men zeggen: de harmonische maat van een voldoend fatsoenlijke verzameling $\omega \subset \partial\Omega$ is in x_0 gelijk aan de waarde van de gegeneraliseerde oplossing in x_0 voor randwaarden 1 op ω en 0 op $\partial\Omega - \omega$. Vergelijk nu het vroegere voorbeeld van een halfruimte.

Men kan nu integraalrekening gaan bedrijven met behulp van μ_x en men kan spreken van μ_x-meetbare verzamelingen en μ_x-integreerbare functies. Dan geldt de volgende belangrijke eigenschap.

Meetbaarheid van een verzameling is onafhankelijk van de keuze van het punt $x \in \Omega$.

Schets van het bewijs: neem eerst een open verzameling $e \subset \partial\Omega$. De karakteristieke functie van e is beneden semi-continu en dus de limiet van een stijgende rij continue functies (ϕ_i). Dan geldt

$$\lim \int \phi_i d\mu = \mu(e).$$

Men vormt dan de uitwendige en de inwendige maat van een verzameling. De uitwendige maat verkrijgt men als het infimum van een familie van harmonische functies en die is superharmonisch. De inwendige maat is subharmonisch. Is de verzameling meetbaar t.o.v. x_0 dan zijn deze functies gelijk in x_0 en bij gevolg overal gelijk, d.w.z. de verzameling is meetbaar t.o.v. elke x.

Opmerking: meetbaarheid hangt niet af van $x \in \Omega$, maar de waarde van de maat van een verzameling wel.

Men kan nu de oplosbare functies karakteriseren.

Stelling. De functie f is oplosbaar dan en slechts dan als f μ-integreerbaar is.

Bewijs. 1. Zij f beneden semi-continu, dus f de limiet van een stijgende rij continue functies (f_n). Dan geldt (pas de continuiteit van f_n toe!):

$$\overline{H}_f(x) = \sup \overline{H}_{f_n}(x) = \sup \int f_n d\mu_x = \int f d\mu_x.$$

Verder

$$\overline{H}_{f_n} = \underline{H}_{f_n} \leqslant \underline{H}_f; \quad \sup H_{f_n} \leqslant \underline{H}_f$$

waaruit volgt

$$\overline{H}_f \leqslant \underline{H}_f,$$

$$H_f = \int f d\mu_x.$$

2. Neem f willekeurig. We bewijzen dat

$$\overline{H}_f(x) = \overline{\int} f d\mu_x.$$

Zij Γ de collectie van de functies ϕ op $\partial\Omega$ die beneden semi-continu zijn en waarvoor $\phi \geqslant f$. Dan is

$$\overline{\int} f d\mu_x = \inf_{\phi} \int \phi d\mu_x = \inf H_{\phi} \geqslant \overline{H}_f(x).$$

Wegens de definitie van de familie Φ_f bestaat er bij gegeven $\varepsilon > 0$ voor elke $x \in \Omega$ een superharmonische functie $v \in \Phi_f$ zó dat

$$v(x) \leqslant \overline{H}_f(x)+\varepsilon.$$

Beschouw de randfunctie op $\partial\Omega$ gedefinieerd door

$$\psi : z \mapsto \liminf_{y \to z} v(y), \quad z \in \partial\Omega.$$

Dan geldt $\psi \in \Gamma$. Dus is

$$\overline{H}_{\psi} \leqslant v,$$

$$\overline{H}_{\psi}(x) \leqslant \overline{H}_f(x)+\varepsilon,$$

$$\overline{\int} f d\mu_x \leqslant \overline{H}_f \text{ (wegens 1).}$$

Tezamen

$$\overline{\int} f d\mu_x = \overline{H}_f(x).$$

Analoog

$$\underline{\int} f d\mu_x = \underline{H}_f(x),$$

en daaruit volgt de stelling.

De harmonische maat van een verzameling is een relatief begrip: de maat van een verzameling hangt niet alleen af van het punt waarin men meet, maar ook van de open verzameling ten opzichte waarvan de harmonische maat wordt bepaald. Bijvoorbeeld geldt:

Zij Ω een open verzameling en $\Omega_1 \supset \Omega$; stel $\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$ (d.w.z. Ω en Ω_1 hebben een deel van de rand gemeen). Zij e μ-meetbaar t.o.v. Ω. Dan is e μ-meetbaar t.o.v. Ω_1 en men heeft

$$\mu_x(e;\Omega) \leq \mu_x(e;\Omega_1), \quad x \in \Omega.$$

Geef zelf het bewijs.

Het nul-zijn van de harmonische maat is ook een relatief begrip. Maar er bestaan verzamelingen die t.o.v. elke open verzameling de harmonische maat 0 hebben, bijv. een verzameling bestaande uit één punt of een polaire verzameling. Daarbij treden nieuwe begrippen op, o.a. het begrip capaciteit dat we later behandelen.

De harmonische maat wordt ook toegepast in de complexe functietheorie.

III.5. Het randgedrag van H_f^Ω.

Zij f continu op $\partial\Omega$.

Definitie. Het punt $\xi \in \partial\Omega$ heet een regulier randpunt indien

$$\lim_{x\to\xi} H_f(x) = f(\xi)$$

voor elke continue f.

Het klassieke probleem van Dirichlet is oplosbaar indien alle randpunten van Ω regulier zijn.

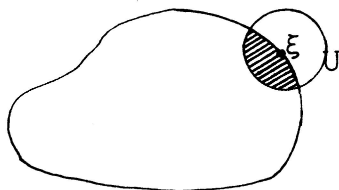
De betrekking moet gelden voor alle continue f. Voor elke open verzameling (begrensd) zijn er wel continue randwaarden aan te geven zó dat voor die randfunctie het probleem van Dirichlet oplosbaar is. Beschouw bijvoorbeeld een bol B zó dat $\overline{\Omega} \subset B$ en beschouw de

restrictie van een Poisson-integraal in $\mathring{B}$ tot $\partial\Omega$.
Een randpunt dat niet regulier is heet irregulier. Vroeger hebben we een voorbeeld gezien van een irregulier randpunt.
De volgende problemen rijzen nu:

1. Gevraagd criteria voor de regulariteit van een randpunt.
2. Welke algemene eigenschappen kan men geven van de verzameling van de irreguliere randpunten van een open verzameling Ω?

Het probleem 2 wordt later behandeld.
Er bestaan verschillende criteria ten aanzien van 1.

Stelling. Zij $\xi \in \partial\Omega$. Nodig en voldoende voor de regulariteit is: er is een omgeving U van ξ zó dat in $\Omega \cap U$ een superharmonische functie v bestaat met de eigenschappen (1) $v > 0$ in $\Omega \cap U$ en (2) $\lim v = 0$ als $x \in \Omega \cap U$ nadert tot ξ.



Het bewijs van de stelling berust op het volgende lemma, dat een soort uitbreidingseigenschap van superharmonische functies geeft.

Lemma. Zij $\xi \in \partial\Omega$ en zij gegeven U en v als in de stelling. Dan bestaat er in Ω een positieve harmonische functie H die nadert tot 0 als $x \to \xi$ en zó dat $\underline{\lim}\, H > 0$ in alle andere randpunten.

Schets van het bewijs. Neem voor U een bol met middelpunt ξ. Zij $\phi(x) = \|\xi - x\|$. Die functie is subharmonisch. Voor de functie H uit het lemma kan men nemen H_ϕ, die harmonisch en positief is, en $H_\phi \geq \phi$. Dan is $H_\phi(x) \to 0$ als $x \to \xi$. Men gebruikt voor het bewijs daarvan de superharmonische functie v bedoeld in de stelling.

Bewijs van de stelling

Zij H de harmonische functie als in het lemma. Zij $\varepsilon > 0$. Zij $\rho > 0$ zó dat $f(\eta) \leq f(\xi)+\varepsilon$ als $\|\xi-\eta\| \leq \rho$ (continuïteit). Zij K het

minimum van H voor $\|x-\xi\| \geqslant \rho$; $K > 0$. Zij M het maximum van f. Beschouw dan

$$F = f(\xi) + \varepsilon + \frac{H}{K}(M-f(\xi)).$$

Dan geldt:

(i) F is harmonisch in Ω.

(ii) $\underline{\lim}\, F \geqslant f$ in elk punt van $\partial\Omega$ (ga dit na).

Dus is $F \in \Phi_f^{\Omega}$ zodat

$$H_f \leqslant F,$$

waaruit volgt

$$\overline{\lim_{x\to\xi}}\, H_f \leqslant f(\xi)+\varepsilon$$

en dus

$$\overline{\lim_{x\to\xi}}\, H_f \leqslant f(\xi).$$

Door uit te gaan van -f bewijst men

$$\overline{\lim}\, H_f \geqslant f(\xi),$$

waaruit dan de stelling volgt.

De noodzakelijkheid van de conditie is evident: men neme de harmonische functie bij randwaarden 0 in ξ en > 0 overal elders.

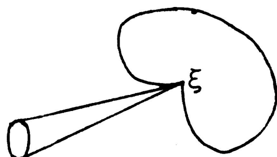
Een functie als in de stelling bedoeld noemt men wel een barrière (de stelling is al van Lebesgue).

Gevolgen

1. De regulariteit van een randpunt is een locale eigenschap; zij hangt alleen af van de rand in de omgeving van een punt.
2. Voor de regulariteit van ξ is nodig en voldoende dat $H_f \to f$ geldt voor één f die zijn minimum alleen in ξ bereikt.

Men kan dit analytische criterium omzetten in geometrische criteria.

Er is een criterium van Poincaré dat een voldoende voorwaarde geeft:

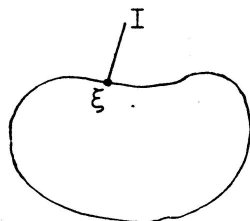


ξ is regulier indien er een kegel met top ξ bestaat in het complement

van Ω met niet-leeg inwendige.

Er is een essentieel verschil tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

In $\mathbb{R}^2$. Zij Ω een begrensde open verzameling. Zij $\xi \in \partial\Omega$ en stel er is een lijnsegment I in het complement van Ω met eindpunt ξ; dan is ξ regulier.



Men kan dan namelijk een barrière aangeven (de voorgaande stelling geldt in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$). Beschouw de situatie als in het complexe vlak. Breng een coupure aan door het segment I. Dan is de functie w, gedefinieerd door

$$w(z) = -\frac{\log|z-\xi|}{|\log(z-\xi)|^2}$$

$$= -\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\log(z-\xi)}\right]$$

in de van de coupure voorziene omgeving van ξ een barrière. Ga dit zelf na.

Dit is een veel ruimere conditie, die o.a. tot gevolg heeft dat iedere enkelvoudig samenhangende open verzameling regulier is (d.w.z. alle randpunten zijn regulier). Een consequentie daarvan is de afbeeldingsstelling van Riemann in de complexe functietheorie.

Er is nog een geometrische nodige en voldoende voorwaarde, maar daarvoor is het begrip capaciteit nodig dat in een volgend hoofdstuk aan de orde komt.

HOOFDSTUK IV

Polaire verzamelingen en capaciteit

De begrippen polaire verzameling en capaciteit spelen een belangrijke rol bij de bestudering van de verdeling van de irreguliere randpunten van een open verzameling Ω. Er wordt een kort overzicht gegeven; enkele bewijzen worden weggelaten of hoogstens aangeduid omdat die worden gevoerd met het begrip balayage, waarvan de theorie in dit college niet wordt gegeven. Men zie hiervoor in de literatuur.

IV.1. Definitie. Een verzameling $E \subset \mathbb{R}^3$ heet polair indien elk punt $x \in E$ een omgeving U_x heeft waarin een superharmonische functie is gedefinieerd die $+\infty$ is in elk punt van $U_x \cap E$.

Dit is een locale definitie, maar men kan overgaan tot een globale vorm wegens de volgende (met de definitie equivalente) eigenschap.

Zij Ω open en $E \subset \Omega$ polair. Dan bestaat er een superharmonische functie in Ω die $+\infty$ is in elk punt van E en die eindig is in een willekeurig gegeven vast punt van $\Omega - E$.

Deze functie heet de aan E toegevoegde superharmonische functie.

Deze stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten, geeft een uitspraak over de verzameling van de punten waar een superharmonische functie de waarde $+\infty$ heeft. Er bestaat verband tussen irreguliere randpunten en polaire verzamelingen; vergelijk de definitie van een barrière. Polaire verzamelingen zijn zoiets als "verwaarloosbare verzamelingen". Dat wordt nader uitgewerkt in het begrip capaciteit dat later volgt.

Voorbeelden

1. Een verzameling bestaande uit één punt x_0 is polair. Beschouw nl. de functie $x \mapsto \|x-x_0\|^{-1}$.

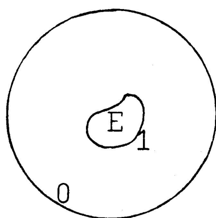
2. Een deelverzameling van een polaire verzameling is polair.
3. De vereniging van aftelbaar veel polaire verzamelingen is polair.
4. Een polaire verzameling heeft de Lebesgue-maat 0. Dit volgt uit het feit dat een superharmonische functie integreerbaar is (dus de punten waar ze $+\infty$ is vormen een nulverzameling).

Voor meer voorbeelden zie Helms, hoofdstuk 7.

IV.2. Het begrip capaciteit

Behandeld wordt de capaciteit van deelverzamelingen van een bol B. Het geval van verzamelingen in een open verzameling Ω brengt geen essentieel nieuwe gezichtspunten.

Zij $B \subset \mathbb{R}^3$ een open bol. Zij $E \subset B$ gesloten; dus B-E open. Neem randwaarden 0 op ∂B en 1 op E (d.w.z. op de rand van E). Volgens de methode van Perron behoort daarbij in B-E een harmonische functie v_E. Men heeft $v_E \leq 1$.



Definieer in B een functie v door

$$v = \begin{cases} 1 \text{ op } E \\ v_E \text{ op } B-E. \end{cases}$$

Door een modificatie van de waarden van v in de irreguliere randpunten voor zover behorend tot E (een zogenaamd regularisatieprocédé in verband met de semi-continuïteit) gaat men over op een nieuwe functie, die verder ook weer met v wordt aangegeven. Dan is v een superharmonische functie in B. Deze functie heet de capacitaire potentiaal van E t.o.v. B. De randwaarden van v op ∂B zijn 0. Om te komen tot het begrip capaciteit van E wordt de representatiestelling van Riesz toegepast (in II.2. al aangeduid).

Stelling van Riesz. Zij v een superharmonische functie in B die een harmonische minorant heeft. Dan bestaat er een eenduidig bepaalde maat $\mu \geq 0$ op B zó dat

$$v(x) = \int_B G(x,y)d\mu(y)+h(x)$$

waarin h de grootste harmonische minorant van v is.

Pas deze stelling toe op de hiervoor gedefinieerde functie v. Wegens de randwaarden op B is de grootste harmonische minorant van deze v gelijk aan 0. Daar v harmonisch is in B-E is de drager van μ bevat in E. Men vindt dus

$$v = \int_E G(x,y)d\mu(y).$$

Definitie. De maat μ heet de capacitaire maat van E en $\mu(E)$ heet de capaciteit van E t.o.v. B, kortweg de capaciteit van E, genoteerd cap E.

Is E een gesloten verzameling met voldoende regelmatige rand, dan bewijst men dat

$$\text{cap } E = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial E} \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

Beschouwt men in plaats van B de gehele ruimte, dan moet men werken met de Newton-potentiaal in plaats van de Greense potentiaal.

Men kan de capaciteit ook langs andere weg invoeren. Beschouw de familie $\mathcal{F}$ van positieve superharmonische functies u die ≥ 1 zijn op E. De functie constant = 1 op B behoort tot $\mathcal{F}$ zodat $v = \inf_{u\in\mathcal{F}} u \leq 1$. Na een regularisatieprocédé als voren voert dit ook tot de capacitaire potentiaal v. Men heeft nog:

De capacitaire potentiaal v van E is de grootste potentiaal van Green in B van positieve maten met drager in E die ≤ 1 is.

Zij nl. ϕ een dergelijke potentiaal van Green. Dan is

$$\lim_{x\to\xi} \phi(x) = 0 \text{ voor alle } \xi \in \partial B,$$

$$\limsup_{x\to\eta} \phi(x) \leq 1 \text{ voor alle } \eta \in \partial E,$$

dus

$$\liminf_{x\to\xi}(u(x)-\phi(x)) \geq 0$$

voor alle $\xi \in \partial(B-E)$, $x \in B-E$ en voor alle $u \in \mathcal{F}$.

Daaruit volgt $u \geqslant \phi$ zodat

$$v = \inf u \geqslant \phi,$$

wat te bewijzen was.

Opmerking. Door een analoog procédé voert men in het begrip "gebalayeerde van een maat", dat voor de verdere theorie een belangrijk begrip is.

Hieruit leidt men nog af:

De capaciteit van E is het supremum van de maten $\mu(E)$ van E voor alle maten $\mu \geqslant 0$ waarvoor $G\mu \leqslant 1$ is.

Eigenschappen van de capaciteit en de capacitaire potentiaal.

De capacitaire potentiaal van E wordt verder aangegeven door toevoeging van een index: v^E.

1. Is E een verzameling bestaande uit één punt, dan is cap E = 0. Want de geregulariseerde van de functie v hiervoor is identiek 0. Evenzo is de capaciteit van de lege verzameling 0. Men ziet hieruit wel dat er verband is met de polaire verzamelingen.

2. Als $E_1 \subset E_2$ geldt

$$v^{E_1} \leqslant v^{E_2},$$

$$\text{cap } E_1 \leqslant \text{cap } E_2.$$

Bewijs met de maximumeigenschap.

3. $v^{E_1 \cup E_2} + v^{E_1 \cap E_2} \leqslant v^{E_1} + v^{E_2}$,

$$\text{cap}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}(E_1 \cap E_2) \leqslant \text{cap } E_1 + \text{cap } E_2.$$

Is $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ dan geldt in het algemeen niet het gelijkteken (ga dit na door beschouwing van de randwaarden).

Dus is

$$\text{cap}(E_1 \cup E_2) \leqslant \text{cap } E_1 + \text{cap } E_2.$$

De capaciteit is een subadditieve maat.

Tot nu toe is de capaciteit ingevoerd voor gesloten verzamelingen. Men breidt het begrip uit met methoden analoog aan die, gebruikelijk in de maattheorie.

a) Open verzamelingen

Zij ω open, $\omega \subset B$. Dan definieert men

$$\text{cap } \omega = \sup_{E \subset \omega} \text{cap } E, \quad E \text{ gesloten.}$$

b) Zij E een willekeurige verzameling $\subset B$. Men definieert

$$\text{cap}^* E = \inf_{\omega \supset E} \text{cap } \omega, \quad \omega \text{ open,}$$

en men noemt $\text{cap}^* E$ de uitwendige capaciteit van E.

Voor gesloten E is

$$\text{cap } E = \text{cap}^* E.$$

Bewijs. Zij E gesloten (compact), $E \subset B$. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een open omgeving ω_0 van E zó dat $E \subset E_1 \subset \omega_0$ impliceert $\text{cap } E_1 - \text{cap } E \leqslant \varepsilon$. Dan is

$$\text{cap } E \leqslant \text{cap}^* \omega_0 = \sup_{E_1 \subset \omega_0} \text{cap } E_1 \leqslant \text{cap } E + \varepsilon,$$

$$\text{cap } E \leqslant \text{cap}^* E = \inf_{\omega \supset E} \text{cap } \omega \leqslant \text{cap } E + \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig is

$$\text{cap } E = \text{cap}^* E.$$

Men kan ook een inwendige capaciteit invoeren als het supremum van de capaciteit van gesloten verzamelingen bevat in E, maar men werkt daar niet mee.

De volgende stelling geeft het verband tussen de polaire verzamelingen en de uitwendige capaciteit.

Stelling. Zij $E \subset B$. E is polair dan en slechts dan als $\text{cap}^* E = 0$.

Bewijs. Stel E is polair. Beschouw een aan E toegevoegde superharmonische functie; splits deze in een Greense potentiaal en een harmonische functie volgens de stelling van Riesz. Deze laatste

functie is begrensd. Er bestaat dus een begrensde maat $\mu > 0$ op B waarvan de potentiaal van Green gelijk aan $+\infty$ is op E. Zij $\alpha > 0$. Zij

$$\omega_\alpha = \{x \in B \mid G\mu(x) > \alpha\}.$$

Daar $G\mu$ beneden semi-continu is, is ω_α een open omgeving van E. Zij $K \subset \omega_\alpha$ en K compact. Dan is, als μ_K de capacitaire maat van K is,

$$\text{cap } K = \int_K d\mu_K \leq \frac{1}{\alpha} \int_K G\mu \cdot d\mu_K$$

want op K is $G\mu > \alpha$. Verwisseling van de integratievolgorde van μ en μ_K geeft voor het rechterlid

$$\frac{1}{\alpha} \int G\mu_K \cdot d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int d\mu$$

(bedenk dat $G\mu_K \leq 1$ is). Dus

$$\text{cap } K \leq \frac{\|\mu\|}{\alpha}.$$

Wegens de definitie van de capaciteit van ω_α volgt daaruit

$$\text{cap } \omega_\alpha \leq \frac{\|\mu\|}{\alpha}$$

voor alle $\alpha > 0$. Verder dan

$$\text{cap}^* E \leq \inf_\alpha \text{cap } \omega_\alpha$$

en als $\alpha \to \infty$ dus

$$\text{cap}^* E = 0.$$

Het bewijs dat een verzameling met uitwendige capaciteit 0 polair is, wordt achterwege gelaten; men construeert via een oneindige reeks een superharmonische functie die $+\infty$ is op E (zie bijv. Brelot, Sorbonne).

De capaciteit van een verzameling hangt af van de open verzameling waarvan men die verzameling als deelverzameling beschouwt. Dat geldt niet voor verzamelingen met uitwendige capaciteit 0: dat is een absoluut begrip. De polaire verzamelingen zijn nl.

locaal gedefinieerd.

Een ander gevolg van deze stelling is de volgende eigenschap:

Zij (E_i) een rij verzamelingen met cap* $E_i = 0$. Zij $E = \bigcup_i E_i$. Dan is cap* $E = 0$.

Want E_i is polair en dus ook $\cup E_i$.

Deze stelling en de conditie dat een randpunt van een open verzameling dan en slechts dan regulier is als er een barrière bestaat, laat vermoeden dat er verband bestaat tussen de verzamelingen met uitwendige capaciteit 0 en de verzameling van de irreguliere randpunten. Dat dit zo is leert de volgende stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten (het begrip balayage speelt daarin een rol).

Stelling. De verzameling van de irreguliere randpunten van een open verzameling Ω heeft een uitwendige capaciteit gelijk aan 0.

In de verdere ontwikkeling aangaande irreguliere randpunten doen zich nu twee - met elkaar verband houdende - richtingen voor. Men gaat over op een fijnere topologie dan de euclidische topologie, de zgn. "fijne topologie", waarbij alle superharmonische functies continu worden. Daardoor elimineert men de randpunten. Men hanteert een gecompliceerdere compactificatie van de ruimte dan de Alexandroff compactificatie door toevoeging van één punt. Een open verzameling krijgt dan een van de euclidische rand verschillende rand, de zgn. rand van Martin. Daarmee kan men een generalisatie geven van de Poisson-integraal voor willekeurige open verzamelingen, leidende tot een representatie van harmonische functies door middel van een integraal uitgestrekt over die Martin-rand. Er is een generalisatie van de capaciteit, de zgn. Choquet-capaciteit, een subadditieve maat gedefinieerd voor verzamelingen in een topologische ruimte, onafhankelijk van de potentiaaltheorie.

LITERATUUR

Klassiek

Kellog, Foundations of potential theory.

Sternberg, Elemente der Potentialtheorie

Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Modern

Helms, Introduction to potential theory.

Brelot, Eléments de la théorie classique du potentiel (Sorbonne).